УДК 514.75

В. Т. Фоменко, Е. А. Коломыцева

СУЩЕСТВОВАНИЕ НЕТРИВИАЛЬНЫХ *ARG*-ДЕФОРМАЦИЙ ПОВЕРХНОСТЕЙ С КРАЕМ ПРИ ОБОБЩЕННЫХ ВТУЛОЧНЫХ СВЯЗЯХ В РИМАНОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Аннотация. Доказывается существование счетного множества коэффициентов рекуррентности ARG-деформаций поверхностей положительной внешней кривизны с краем в римановом пространстве при условии, что вдоль края поверхность подчинена обобщенной втулочной связи, для которой существуют нетривиальные ARG-деформации поверхностей.

Ключевые слова: риманово пространство, поверхность, внешняя кривизна, обобщенная втулочная связь, ARG-деформация.

Abstract. The authors proved the existence of the denumerable set of the coefficients of the recurrent of ARG-deformations of the surfaces of the positive exterior curvature with boundary in a Riemannian space provided that the surface is subjected to the generalized hub relation along boundary for which the nontrivial ARG-deformations of the surface exist.

Keywords: Riemannian space, surface, exterior curvature, generalized hub relation, ARG-deformation.

1. Предварительные сведения

Пусть R^3 – трехмерное риманово пространство с метрикой $a_{\alpha\beta}dy^{\alpha}dy^{\beta}$, $a_{\alpha\beta} \in C^4$ и F^2 – $(m+1)$-связная поверхность с краем, заданная уравнениями

$$y^{\alpha} = f^{\alpha}\left(x^1, x^2\right), \ \alpha = 1,2,3, \ \left(x^1, x^2\right) \in D, \tag{1}$$

где $f^{\alpha}\left(x^1, x^2\right)$ – функции класса C^3. Пусть, далее, граница ∂D области D принадлежит классу C^2. Эти условия будем называть условиями регулярности поверхности. Будем считать, что внешняя кривизна поверхности в каждой точке положительна: $K \geq k_0 > 0$, $k_0 = \text{const}$.

Рассмотрим бесконечно малую деформацию $\{F_{\varepsilon}\}$, $F_0 = F^2$, поверхности F^2, определяемую уравнениями $y_{\varepsilon}^{\alpha} = y^{\alpha} + \varepsilon z^{\alpha}$, где ε – малый параметр, z^{α} – векторное поле смещения точек поверхности F^2 при ее деформации. Представим поле смещения в виде суммы $z^{\alpha} = z_{\tau}^{\alpha} + z_n^{\alpha}$, где $z_{\tau}^{\alpha} = a^i y_{,i}^{\alpha}$ – тангенциальная составляющая поля z^{α}; знак «$_{,i}$» означает ковариантную производную по переменной x^i в метрике поверхности F^2; $z_n^\alpha = cn^\alpha$ – нормальная составляющая поля z^α; n^α – поле единичных векторов нормалей к поверхности F^2, $y,_i^\alpha = \dfrac{\partial y^\alpha}{\partial x^i}$, $i = 1, 2$. Будем рассматривать поля z^α такие, что их касательные и нормальные составляющие принадлежат соответственно классам C^1 и C^2. Соответствующие деформации назовем допустимыми.

Бесконечно малую деформацию $\{F_\varepsilon\}$ поверхности F^2 назовем ареально-рекуррентной G-деформацией с коэффициентом рекуррентности λ (коротко – ARG-деформацией) [1], если выполнены условия:

1) вариация $\delta(d\sigma)$ элемента площади $d\sigma$ поверхности F^2 удовлетворяет соотношению

$$\delta(d\sigma) = 2H\lambda c d\sigma, \tag{2}$$

где H – средняя кривизна поверхности F^2, λ – заданное число, называемое коэффициентом рекуррентности;

2) бесконечно малая деформация поверхности F^2 является G-деформацией, т.е. для любой точки поверхности F^2 ее единичный вектор нормали n^α, параллельно перенесенный в R^3 в смысле Леви-Чивита в направлении вектора z^α в соответствующую точку поверхности F_ε^2, совпадает с вектором нормали n_ε^α к F_ε^2 в этой точке.

Будем говорить, что поверхность F^2 является λ-жесткой в отношении ARG-деформаций, если для заданного коэффициента рекуррентности λ во множестве ARG-деформаций поверхности F^2 содержится только тождественная ARG-деформация с полем смещения $z^\alpha \equiv 0$; в противном случае поверхность F^2 будем называть λ-нежесткой.

Зададим на краю ∂F^2 поверхности F^2 отличное от нуля векторное поле

$$l^\alpha = l_\tau^\alpha + l_n^\alpha, \tag{3}$$

где $l_\tau^\alpha = l^i y,_i^\alpha$ – тангенциальная составляющая поля l^α; $l_n^\alpha = l^3 n^\alpha$ – нормальная составляющая поля l^α; l^1, l^2, l^3 – заданные функции класса C^1.

Будем рассматривать бесконечно малые ARG-деформации поверхности F^2, подчиненные на краю ∂F^2 условию

$$a_{\alpha\beta} z^\alpha l^\beta = 0. \tag{4}$$

Это условие назовем условием обобщенной втулочной связи.

Для формулировки результата введем в рассмотрение правый сопровождающий трехгранник Френе $\{t^\alpha, \eta^\alpha, n^\alpha\}$ края ∂F^2 поверхности F^2, где t^α – поле единичных векторов касательных к краю ∂F^2; η^α – поле единичных векторов тангенциальных нормалей к краю ∂F^2; n^α – поле единичных векторов нормалей к краю ∂F^2.

Имеет место следующая

Теорема. *Пусть* $(m+1)$*-связная поверхность* F^2 *положительной внешней кривизны* $K \geq k_0 > 0$, $k_0 = \text{const}$, *в римановом пространстве* R^3 *удовлетворяет условиям регулярности, ориентирована так, что ее средняя кривизна* H *положительна, и подвергнута бесконечно малой* ARG*-деформации с заданным коэффициентом рекуррентности* λ. *Пусть, далее, поверхность* F^2 *подчинена обобщенной втулочной связи* (4), *где поле* l^α *таково, что тангенциальная составляющая* $l_\tau^\alpha = l^i y_{,i}^\alpha$ *сопряжена с направлением* t^α *края* ∂F^2 *поверхности* F^2, *образует тупой угол с тангенциальной нормалью* η^α *края* ∂F^2, *и координата* $l^3 < 0$. *Тогда существует точно счетное множество* $\{\lambda_i\}_{i=1}^\infty$ *значений* λ, $-1 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots$, $\lambda_i \to \infty$ *при* $i \to \infty$, *таких, что*

1) при $\lambda = \lambda_i$ $(i = 1, 2, \ldots)$ *поверхность* F^2 *является* λ_i*-нежесткой в отношении допустимых бесконечно малых* ARG*-деформаций с коэффициентом рекуррентности* λ_i *при условии обобщенной втулочной связи* (4); *для каждого значения* λ_i $(i = 1, 2, \ldots)$ *поверхность* F^2 *допускает конечное число линейно-независимых векторных полей смещений* z^α, *определяющих бесконечно малые* ARG*-деформации с коэффициентом рекуррентности* λ_i;

2) при $\lambda \neq \lambda_i$ $(i = 1, 2, \ldots)$ *поверхность* F^2 *является* λ*-жесткой в отношении бесконечно малых* ARG*-деформаций с коэффициентом рекуррентности* λ *при условии обобщенной втулочной связи* (4).

2. Вывод уравнения бесконечно малых ARG-деформаций

Лемма 1. *Пусть* $(m+1)$*-связная поверхность* F^2 *положительной внешней кривизны* $K \geq k_0 > 0$, $k_0 = \text{const}$, *в римановом пространстве* R^3 *удовлетворяет условиям регулярности и подвергнута бесконечно малой* ARG*-деформации с коэффициентом рекуррентности* λ *и полем смещения* $z^\alpha = a^i y_{,i}^\alpha + cn^\alpha$. *Тогда уравнение для функции* c *в координатной форме имеет вид:* $\partial_k(\sqrt{g}\tilde{b}^{ik}\partial_i c) + (1+\lambda)2H\sqrt{g}c = 0$, *где* $g_{ij} = a_{\alpha\beta} y_{,i}^\alpha y_{,j}^\beta$, g^{kl} *– тензор, обратный к* g_{ij}; $g = \det\|g_{ij}\|$, $b_{ij} = a_{\alpha\beta} y_{,ij}^\alpha n^\beta$, $\tilde{b}^{ij} = \|b_{ij}\|^{-1}$, $2H = g^{im} b_{im}$.

При этом функции a^i *находятся по формуле* $a^i = -\tilde{b}^{ij}\partial_j c$.

Доказательство. По условию теоремы поверхность F^2 задана уравнениями (1). Положим $z^\alpha = a^i y_{,i}^\alpha + cn^\alpha$, a^i, c – искомые координаты поля смещения точек поверхности при ее ARG-деформации. Перенесем тензор $(y_{,i}^\alpha + \varepsilon z_{,i}^\alpha)$ параллельно в смысле Леви-Чивита в точку (y^α). В результате получим тензор $y,_i^\alpha + \varepsilon(z,_i^\alpha + \Gamma_{\sigma r}^\alpha y,_i^\sigma z^r)$, где $\Gamma_{\sigma r}^\alpha$ – символы Кристоффеля, вычисленные по тензору $a_{\alpha\beta}$ в точке $(y^\alpha + \varepsilon z^\alpha)$. Обозначая через ∇_i смешанное ковариантное дифференцирование по переменной x^i в R^3, запишем результат параллельного перенесения тензора $(y,_i^\alpha + \varepsilon z,_i^\alpha)$ в точку (y^α) в виде $y,_i^\alpha + \varepsilon \nabla_i z,_i^\alpha$, где $\nabla_i z^\alpha = z,_i^\alpha + \Gamma_{ir}^\alpha z^r$; $\Gamma_{\sigma r}^\alpha$ вычисляются в точке (y^α). Так как для ARG-деформации полученный вектор лежит в касательной к F^2 плоскости в точке (y^α), то имеет место соотношение

$$a_{\alpha\beta} \nabla_i z^\alpha n^\beta = 0 . \tag{5}$$

Преобразуем уравнение (5). Используя уравнения Гаусса $\nabla_j y,_i^\alpha = b_{ij} n^\alpha$ и уравнения Вейнгаартена $\nabla_j n^\alpha = -b_{jk} g^{kl} y,_l^\alpha$, находим

$$\nabla_j z^\alpha = (a^i b_{ij} + c,_j) n^\alpha + (a,_j^i - c b_{jm} g^{mi}) y,_i^\alpha . \tag{6}$$

Подставляем найденное выражение $\nabla_j z^\alpha$ в уравнение (5), получим уравнения, описывающие G-деформации поверхности F^2 в координатной форме:

$$\partial_j c + a^i b_{ij} = 0, \; i = 1, 2 , \tag{7}$$

где $\partial_j c = c,_j$ – частная производная функции c по переменной x^i.

Выведем уравнение, описывающее ареально-рекуррентную деформацию поверхности F^2 с коэффициентом рекуррентности λ. Условие (2) в силу соотношения $d\sigma = \sqrt{g} dx^1 dx^2$, $g = \det \left\| g_{ij} \right\|$, эквивалентно соотношению

$$\delta g = 4\lambda H g c . \tag{8}$$

Подсчет показывает, что $\delta g_{ij} = a_{\alpha\beta} \nabla\left({}_i z^\alpha y,_j^\beta\right)$.

Используя полученное выражение для δg_{ij}, найдем δg. Имеем

$$\delta g = \begin{vmatrix} g_{11} & \delta g_{21} \\ g_{12} & \delta g_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \delta g_{11} & g_{21} \\ \delta g_{12} & g_{22} \end{vmatrix} = g g^{ij} \delta g_{ij} = g g^{ij} y,_{(i}^\alpha \nabla_{j)} z^\beta a_{\alpha\beta} .$$

Подставляя полученное выражение для δg в уравнение (8), найдем уравнение $g^{ij} a_{\alpha\beta} \nabla_{(i} z^\alpha y,_{j)}^\beta = 4\lambda H c$. Учитывая формулу (6), запишем это уравнение в виде: $a,_i^i - c b_{im} g^{mi} = 2H\lambda c$. Учитывая формулу Фосса – Вейля $\partial_i \ln \sqrt{g} = \tilde{A}_{ij}^j$, где $\tilde{A}_{ij}^k$ – символы Кристоффеля поверхности F^2 в метрике g_{ij}, и выражение $2H = g^{im} b_{im}$, последнее уравнение преобразуем к виду

$$\partial_k(\sqrt{g}a^k) = 2H(1+\lambda)c\sqrt{g}\,. \tag{9}$$

Уравнение (9) есть искомое дифференцированное уравнение для координат a^i, c. Воспользуемся тем условием, что для поверхности F^2 внешняя кривизна положительна. В этом случае вторая основная форма $b_{ij}dx^i dx^j$ поверхности F^2 положительно определена, поэтому $\det\left\|b_{ij}\right\| \neq 0$. Обозначим через $\tilde{b}^{ij}$ тензор, обратный к тензору b_{ij}, т.е. удовлетворяющий условию $\tilde{b}^{ij}b_{ik} = \delta_k^j$, где δ_k^j – символ Кронекера. Тогда из уравнения (7) находим

$$a^i = -\tilde{b}^{ij}\partial_j c\,. \tag{10}$$

Подставляя выражение из формулы (10) в уравнение (9), находим окончательно уравнение для функции c, описывающей ARG-деформацию поверхности F^2 с коэффициентом рекуррентности λ, в координатной форме: $\partial_k(\sqrt{g}\tilde{b}^{ik}\partial_i c) + (1+\lambda)2H\sqrt{g}c = 0$.

Зная решение c последнего уравнения, поле смещения z^α точек поверхности F^2 при ARG-деформации представляем в координатном виде по формуле

$$z^\alpha = -\tilde{b}^{ij}\partial_j c y_{,i}^{\alpha} + cn^\alpha\,. \tag{11}$$

Лемма доказана.

3. Вывод условия обобщенной втулочной связи

Дадим аналитическую запись условия обобщенной втулочной связи. Здесь и далее в работе считаем, что на поверхности F^2 введена изотермически-сопряженная параметризация, т.е. вторая квадратичная форма поверхности имеет вид $\mathrm{II} = \Lambda((dx^1)^2 + (dx^2)^2)$, где $(x^1, x^2) \in D$. Отметим, что при этой параметризации тангенциальная составляющая l_τ^α поля l^α переходит в поле векторов $l_\tau = \{l_1, l_2\}$ на границе ∂D области D в плоскости (x^1, x^2). Имеет место

Лемма 2. *Пусть на краю ∂F^2 поверхности F^2 положительной внешней кривизны $K \geq k_0 > 0$, $k_0 = \text{const}$, задано векторное поле* (3). *Пусть, далее, поверхность F^2 при бесконечно малой ARG-деформации подчинена вдоль края ∂F^2 условию обобщенной втулочной связи* (4). *Тогда это условие можно представить в виде*

$$\frac{\partial c}{\partial l} - \Lambda\tilde{l}^3 c = 0 \text{ на } \partial D, \tag{12}$$

где $\dfrac{\partial c}{\partial l}$ – производная по направлению

$$l = \left\{ \frac{l_1}{\sqrt{l_1^2 + l_2^2}}, \frac{l_2}{\sqrt{l_1^2 + l_2^2}} \right\}$$

в плоскости (x^1, x^2), $l_i = g_{ij} l^j$, $\tilde{l}^3 = \dfrac{l^3}{\sqrt{l_1^2 + l_2^2}}$.

Доказательство. Так как координаты векторного поля смещения z^α имеют вид $z^\alpha = a^i y,_i^\alpha + cn^\alpha$, а координаты l^α имеют вид $l^\alpha = l^i y,_i^\alpha + l^3 n^\alpha$, то

$$a_{\alpha\beta} z^\alpha l^\beta = a_{\alpha\beta}(a^i y,_i^\alpha + cn^\alpha)(l^j y,_j^\beta + l^3 n^\beta) = a_{\alpha\beta} y,_i^\alpha\, y,_j^\beta\, a^i l^j +$$

$$+ a_{\alpha\beta} y,_j^\beta\, n^\alpha c l^j + a_{\alpha\beta} y,_i^\alpha\, n^\beta a^i l^3 + a_{\alpha\beta} n^\alpha n^\beta c l^3 = g_{ij} a^i l^j + c l^3 =$$

$$= a^i l_i + c l^3 = \left(-\frac{\partial_1 c}{\Lambda} l_1 \right) + \left(-\frac{\partial_2 c}{\Lambda} l_2 \right) + c l^3 = -\frac{1}{\Lambda}(\partial_1 c \cdot l_1 + \partial_2 c \cdot l_2) + c l^3 .$$

Подставим последнее равенство в (4) и получим

$$\partial_1 c \cdot l_1 + \partial_2 c \cdot l_2 - \Lambda c l^3 = 0 . \tag{13}$$

Обозначая $\tilde{l}^3 = \dfrac{l^3}{\sqrt{l_1^2 + l_2^2}}$, условие (13) запишем в виде $\dfrac{\partial c}{\partial l} - \Lambda \tilde{l}^3 c = 0$, что совпадает с (12). Лемма доказана.

4. Доказательство теоремы

Нахождение бесконечно малых ARG-деформаций поверхности F^2 с полем смещения $z^\alpha = a^i y,_i^\alpha + cn^\alpha$ при условии обобщенной втулочной связи (4), как было показано в леммах 1 и 2, в изотермически-сопряженной параметризации сводится к изучению разрешимости краевой задачи:

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{2} \partial_i \left(\frac{\sqrt{g}}{\Lambda} \partial_i c \right) + (1 + \lambda) 2H \sqrt{g} c = 0 \text{ в } D, \\ \dfrac{\partial c}{\partial l} - \Lambda \tilde{l}^3 c = 0 \text{ на } \partial D. \end{cases} \tag{14}$$

При этом функции a^i находятся по формуле $a^i = -\dfrac{\partial_i c}{\Lambda}$.

Так как тангенциальная составляющая $l_\tau^\alpha = l^i y,_i^\alpha$ поля l^α сопряжена с направлением t^α края поверхности F^2 и образует тупой угол с тангенциальной нормалью η^α края поверхности F^2, то при изотермически-сопряженной параметризации направление прообраза l_τ вектора l_τ^α совпадает с направлением внешней нормали к области D в плоскости (x^1, x^2). Перепишем (14) в операторном виде:

$$\begin{cases} Lc = \mu c \text{ в } D, \\ Bc = 0 \text{ на } D, \end{cases} \tag{15}$$

где $L = -\dfrac{1}{2H\sqrt{g}} \sum\limits_{i=1}^{2} \partial_i \left(\dfrac{\sqrt{g}}{\Lambda} \partial_i \right)$, $B = \dfrac{\partial}{\partial l} - \Lambda \tilde{l}^3$, $\mu = \lambda + 1$.

Рассмотрим в области D пространство функций $L_2(D, 2H)$, считая, что $f \in L_2(D, 2H)$, если

$$\int\limits_D 2H\sqrt{g} f(x^1, x^2) \bar{f}(x^1, x^2) dx^1 dx^2 < \infty,$$

$$\left. \frac{\partial f}{\partial l} - \Lambda \tilde{l}^3 f \right|_{\partial D} = 0, \ 2H > 0, \ (x^1, x^2) \in D.$$

Пространство $L_2(D, 2H)$ является полным банаховым пространством с нормой

$$\|f\| = \left\{ \int\limits_D 2H\sqrt{g} f\left(x^1, x^2\right) \bar{f}\left(x^1, x^2\right) dx^1 dx^2 \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Превратим его в гильбертово пространство, определив на нем скалярное произведение по формуле

$$(f, w)_{L_2(D,2H)} = \int\limits_D 2H\sqrt{g} f\left(x^1, x^2\right) \bar{w}\left(x^1, x^2\right) dx^1 dx^2$$

для любых $f, w \in L_2(D, 2H)$. Будем рассматривать на D оператор L, определяемый формулой (15). Отнесем к области определения M_L оператора все функции f класса C^2 такие, что $f \in L_2(D, 2H)$, $\left. \dfrac{\partial f}{\partial l} - \Lambda \tilde{l}^3 f \right|_{\partial D} = 0$. Покажем, что оператор L является эрмитовым. Для этого следует убедиться, что M_L плотно в $L_2(D, 2H)$ и $(Lf, w)_{L_2(D,2H)} = (f, Lw)_{L_2(D,2H)}$ $\forall f, w \in M_L$.

Так как множество бесконечно дифференцируемых на D функций плотно в $L_2(D, 2H)$ и это множество содержится в M_L, то M_L плотно в $L_2(D, 2H)$. Подсчитаем разность $(Lf, w)_{L_2(D,2H)} - (f, Lw)_{L_2(D,2H)}$ при $f, w \in M_L$.

Имеем $\sum\limits_{i=1}^{2} \partial_i \left(\dfrac{\sqrt{g}}{\Lambda} \partial_i f \right) = \operatorname{div} \left(\dfrac{\sqrt{g}}{\Lambda} \nabla f \right)$. Поэтому можем представить оператор L в виде

$$L = -\frac{1}{2H\sqrt{g}} \operatorname{div} \left(\frac{\sqrt{g}}{\Lambda} \nabla \right);$$

$$(Lf,w)_{L_2(D,2H)}-(f,Lw)_{L_2(D,2H)}=$$

$$=-\int\limits_D\left[\overline{w}\operatorname{div}\left(\frac{\sqrt{g}}{\Lambda}\nabla f\right)-f\operatorname{div}\left(\frac{\sqrt{g}}{\Lambda}\nabla\overline{w}\right)\right]dx^1dx^2=$$

$$=-\int\limits_{\partial D}\sqrt{g}\tilde{l}^3\overline{w}fdS+\int\limits_D\frac{\sqrt{g}}{\Lambda}\nabla f\nabla\overline{w}dx^1dx^2+\int\limits_D\overline{w}\nabla f\nabla\frac{\sqrt{g}}{\Lambda}dx^1dx^2-$$

$$-\int\limits_D\overline{w}\nabla f\nabla\frac{\sqrt{g}}{\Lambda}dx^1dx^2+\int\limits_{\partial D}\sqrt{g}\tilde{l}^3\overline{w}fdS-\int\limits_D\frac{\sqrt{g}}{\Lambda}\nabla f\nabla\overline{w}dx^1dx^2-$$

$$-\int\limits_D f\nabla\overline{w}\nabla\frac{\sqrt{g}}{\Lambda}dx^1dx^2+\int\limits_D f\nabla\overline{w}\nabla\frac{\sqrt{g}}{\Lambda}dx^1dx^2=0\,.$$

Следовательно, оператор L является эрмитовым в области M_L.

Покажем, что оператор L является положительным. Для этого подсчитаем $(Lf,f)_{L_2(D,2H)}$ $\forall f\in M_L$:

$$(Lf,f)_{L_2(D,2H)}=-\int\limits_D\operatorname{div}\left(\frac{\sqrt{g}}{\Lambda}\nabla f\right)\overline{f}dx^1dx^2=-\int\limits_D\overline{f}\,\frac{\sqrt{g}}{\Lambda}\operatorname{div}(\nabla f)dx^1dx^2-$$

$$-\int\limits_D\left(\overline{f}\nabla f\nabla\frac{\sqrt{g}}{\Lambda}\right)dx^1dx^2=\int\limits_D\frac{\sqrt{g}}{\Lambda}|\nabla f|^2dx^1dx^2-\int\limits_{\partial D}\sqrt{g}\tilde{l}^3|f|^2\,dS\,.$$

Таким образом, $(Lf,f)_{L_2(D,2H)}=\int\limits_D\frac{\sqrt{g}}{\Lambda}|\nabla f|^2dx^1dx^2-\int\limits_{\partial D}\sqrt{g}\tilde{l}^3|f|^2\,dS\ge 0$.

Это означает, что оператор L является положительным на M_L. Известно, что эрмитов положительный оператор имеет не более чем счетное множество $\{\mu_i\}$ неотрицательных собственных значений $\mu_i\ge 0$, не имеющих предельных точек на конечном расстоянии. Каждое собственное значение оператора L действительно и имеет конечную кратность.

Покажем теперь, что множество $\{\mu_i\}$ бесконечно. Введем в рассмотрение на D пространство функций $H_2^1(D,\sqrt{g})$, элементы которого вместе со своими производными первого порядка принадлежат классу $L_2(D,2H)$. Пространство $H_2^1(D,\sqrt{g})$ является гильбертовым пространством со скалярным произведением

$$(f,w)_{H_2^1(D,\sqrt{g})}=\int\limits_D\frac{\sqrt{g}}{\Lambda}\nabla f\nabla\overline{w}dx^1dx^2-\int\limits_{\partial D}\tilde{l}^3\sqrt{g}\,f\overline{w}dS\,. \tag{16}$$

Функцию $c\in H_2^1(D,\sqrt{g})$ назовем обобщенным решением уравнения $Lc=\mu c$, если выполняется соотношение

$$\int\limits_D \frac{\sqrt{g}}{\Lambda} \nabla c \nabla \overline{w} dx^1 dx^2 - \int\limits_{\partial D} \tilde{l}^3 \sqrt{g} c \overline{w} dS = \mu \int\limits_D 2H \sqrt{g} c \overline{w} dx^1 dx^2$$

для любой функции w класса $H_2^1(D, \sqrt{g})$. Это уравнение можно переписать в виде

$$(c, w)_{H_2^1(D,\sqrt{g})} = \mu (c, w)_{L_2(D,2H)} \ \forall w \in H_2^1(D, \sqrt{g}). \tag{17}$$

Функция $c \in H_2^1(D, \sqrt{g})$, $c \neq 0$, называется обобщенной функцией оператора L, если существует такое число μ, что функция c при всех $w \in H_2^1(D, \sqrt{g})$ удовлетворяет соотношению (17). Число μ называется собственным значением, соответствующим обобщенной функции c. Будем считать, что $\|c\|_{L_2(D,2H)} = 1$.

Покажем, следуя [2], что существует линейный ограниченный оператор A из $L_2(D, 2H)$ в $H_2^1(D, \sqrt{g})$ с областью определения $L_2(D, 2H)$, для которого при всех $w \in H_2^1(D, \sqrt{g})$ имеет место равенство $(c, w)_{L_2(D,2H)} =$ $= (Ac, w)_{H_2^1(D,\sqrt{g})}$. При этом оператор A имеет обратный A^{-1}, и оператор A, если его рассматривать из $H_2^1(D, \sqrt{g})$ в $H_2^1(D, \sqrt{g})$, является самосопряженным, положительным и вполне непрерывным. Для доказательства этого утверждения рассмотрим линейный функционал из $H_2^1(D, \sqrt{g})$, заданный формулой $l(w) = (c, w)_{L_2(D,2H)}$, где c – фиксированная функция из $L_2(D, 2H)$, $w \in H_2^1(D, \sqrt{g})$.

Так как

$$|l(w)| = \left|(c, w)_{L_2(D,2H)}\right| \le \left|\int\limits_D 2H \sqrt{g} c \overline{w} dx^1 dx^2\right| \le \int\limits_D 2H \sqrt{g} |c||w| dx^1 dx^2 \le$$

$$\le c_1 \|c\|_{L_2(D)} \|w\|_{L_2(D)} \le c_2 \|c\|_{L_2(D,2H)} \|w\|_{L_2(D,2H)} \le c_3 \|c\|_{L_2(D,2H)} \|w\|_{H_2^1(D,\sqrt{g})},$$

то функционал $l(w) = (c, w)_{L_2(D,2H)}$ ограничен. Поэтому по теореме Рисса существует единственная функция $U \in H_2^1(D, \sqrt{g})$ такая, что

$$l(w) = (U, w)_{H_2^1(D,\sqrt{g})} \ \forall w \in H_2^1(D, \sqrt{g}),$$

при этом $\|U\|_{H_2^1(D,\sqrt{g})} = \|l\| \le C \|c\|_{L_2(D,2H)}$. Это означает, что на $L_2(D, 2H)$ задан линейный оператор $Ac = U$, для которого имеет место равенство $(c, w)_{L_2(D,2H)} = (U, w)_{H_2^1(D,\sqrt{g})}$. Так как

$$\|Ac\|_{H_2^1(D,\sqrt{g})}=\|U\|_{H_2^1(D,\sqrt{g})}\le C\|c\|_{L_2(D,2H)},$$

то оператор A из $L_2(D,2H)$ в $H_2^1(D,\sqrt{g})$ ограничен. Пусть при некотором $c\in L_2(D,2H)$ имеем $Ac=0$. Тогда $U=0$ и $(c,w)_{L_2(D,2H)}=0$ $\forall w\in H_2^1(D,\sqrt{g})$. Поэтому

$$\int_D 2H\sqrt{g}c\overline{w}dx^1dx^2=0\ \forall w\in H_2^1(D,\sqrt{g}).$$

Отсюда следует, что $c=0$, т.е. уравнение $Ac=0$ имеет только нулевое решение, и потому существует оператор A^{-1}.

Так как

$$(Ac,w)_{H_2^1(D,\sqrt{g})}=(c,w)_{L_2(D,2H)}=\overline{(w,c)}_{L_2(D,2H)}=$$

$$=\overline{(Aw,c)}_{H_2^1(D,\sqrt{g})}=(c,Aw)_{H_2^1(D,\sqrt{g})},$$

то оператор A является самосопряженным.

Кроме того, оператор A положительный, так как

$$(Ac,c)_{H_2^1(D,\sqrt{g})}=(c,c)_{L_2(D,2H)}=\int_D 2H\sqrt{g}c\overline{c}dx^1dx^2\ge 0,$$

где равенство нулю возможно только при $c=0$.

Покажем, что оператор A из $H_2^1(D,\sqrt{g})$ в $H_2^1(D,\sqrt{g})$ является вполне непрерывным. Для этого возьмем произвольное ограниченное множество функций в $H_2^1(D,\sqrt{g})$. Это множество компактно в $L_2(D,2H)$, т.е. из любого его бесконечного подмножества в $L_2(D,2H)$ можно выбрать фундаментальную последовательность c_s, $s=1,2,\ldots$ Так как оператор A из $L_2(D,2H)$ в $H_2^1(D,\sqrt{g})$ ограничен, то он непрерывен, и потому Ac_s, $s=1,2,\ldots$, образуют фундаментальную последовательность в $H_2^1(D,\sqrt{g})$. Это означает, что оператор A вполне непрерывен из $H_2^1(D,\sqrt{g})$ в $H_2^1(D,\sqrt{g})$. Перепишем уравнение (17) в виде

$$(c,w)_{H_2^1(D,\sqrt{g})}=\mu(Ac,w)_{H_2^1(D,\sqrt{g})},$$

что эквивалентно операторному уравнению в пространстве $H_2^1(D,\sqrt{g})$: $\mu Ac=c$, $c\in H_2^1(D,\sqrt{g})$. Таким образом, число μ является собственным значением оператора L, а c – соответствующей ему обобщенной собственной функцией, тогда и только тогда, когда μ есть характеристическое число оператора A из $H_2^1(D,\sqrt{g})$ в $H_2^1(D,\sqrt{g})$, c – соответствующий ему собственный элемент. Так как оператор A является самосопряженным, положительным и вполне непрерывным, то существует не более чем счетное множество характеристических чисел уравнения $\mu Ac = c$ в пространстве $H_2^1(D,\sqrt{g})$. Это множество не имеет предельных конечных точек, все собственные значения вещественны, каждому собственному значению отвечает конечное число ортогональных в $H_2^1(D,\sqrt{g})$ собственных функций, собственные функции, соответствующие различным собственным значениям, ортогональны в $H_2^1(D,\sqrt{g})$.

Пусть μ_s, $s = 1,2,\ldots$ – последовательность, содержащая все характеристические числа оператора A; c_s, $s = 1,2,\ldots$, – система взаимно ортогональных в $H_2^1(D,\sqrt{g})$ собственных функций, таких что $\|c_s\|_{H_2^1(D,\sqrt{g})} = 1$ и

$$\mu_s Ac_s = c_s\,,\ s = 1,2,\ldots \tag{18}$$

Умножим (18) скалярно в $H_2^1(D,\sqrt{g})$ на c_s, получим

$$(c_s,c_s)_{H_2^1(D,\sqrt{g})} = \|c_s\|^2_{H_2^1(D,\sqrt{g})} = \int\limits_D \frac{\sqrt{g}}{\Lambda}\nabla c\nabla\bar{c}dx^1dx^2 - \int\limits_{\partial D}\tilde{l}^3\sqrt{g}c\bar{c}dS =$$

$$= \mu_s(Ac_s,c_s)_{H_2^1(D,\sqrt{g})} = \mu_s(c_s,c_s)_{L_2(D,2H)} = (\lambda_s+1)\|c\|^2_{L_2(D,2H)} = \lambda_s + 1\,.$$

Это соотношение можно переписать в виде

$$\int\limits_D \frac{\sqrt{g}}{\Lambda}|\nabla c|^2dx^1dx^2 - (\lambda_s+1)\int\limits_D 2H\sqrt{g}|c|^2dx^1dx^2 - \int\limits_{\partial D}\tilde{l}^3\sqrt{g}|c|^2\,dS = 0\,.$$

Из полученного равенства следует, что $\lambda_s + 1 > 0$, $s = 1,2,\ldots$ Из соотношения (18) вытекает, что система функций $\frac{c_1}{\sqrt{\lambda_1+1}},\frac{c_2}{\sqrt{\lambda_2+1}},\ldots$ является ортонормированной в $H_2^1(D,\sqrt{g})$ системой и потому является ортонормированным базисом в $H_2^1(D,\sqrt{g})$. Так как пространство функций $H_2^1(D,\sqrt{g})$ бесконечномерно, то множество $\{c_s\}$, $s = 1,2,\ldots$, является бесконечным. Поэтому $\mu_s \to \infty$ при $s \to \infty$. Таким образом, установлено, что уравнение $Lc = \mu c$ имеет счетное множество $\{\mu_i\}_i^\infty$ собственных значений μ_i, для которых оно имеет ненулевое решение, принадлежащее классу $H_2^1(D,\sqrt{g})$. Так как $\frac{2H}{\Lambda} \in C^1$, то обобщенные собственные функции c оператора L принадлежат классу $H_2^1(D,\sqrt{g})$. В силу теоремы вложения $H_2^1(D,\sqrt{g}) \subset C^2$, потому обобщенные собственные функции c_s являются функциями класса C^2, при этом $Lc_s \in L_2(D,2H)$. В силу формулы (11) находим, что касательная составляющая $-\frac{\partial_i c}{\Lambda} y_{,i}^{\alpha}$ поля смещения z^{α} принадлежит классу C^1, если $c_s \in C^2$. Теорема доказана.

Список литературы

1. **Fomenko, V. T.** ARG-deformations of a hypersurface with a boundary in a Riemannian space / V. T. Fomenko, N. S. Tensor. – Chigasaki, Japan, 1993. – V. 54.
2. **Михайлов, В. П.** Дифференциальные уравнения в частных производных / В. П. Михайлов. – М. : Наука, 1976. – 520 с.

Фоменко Валентин Трофимович
доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой алгебры и геометрии, Таганрогский государственный педагогический институт, заслуженный деятель науки

Fomenko Valentin Trofimovich
Doctor of physical and mathematical sciences, professor, head of sub-department of algebra and geometry, Taganrog State Pedagogical University, Honoured Scientist of the Russian Federation

E-mail: vtfomenko@rambler.ru

Коломыцева Елена Алексеевна
аспирант, Таганрогский государственный педагогический институт

Kolomitseva Elena Alekseevna
Postgraduate student, Taganrog State Pedagogical University

E-mail: kolomytseva86@mail.ru

УДК 514.75

Фоменко, В. Т.

Существование нетривиальных ARG-деформаций поверхностей с краем при обобщенных втулочных связях в римановом пространстве / В. Т. Фоменко, Е. А. Коломыцева // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2010. – № 3 (15). – С. 3–14.